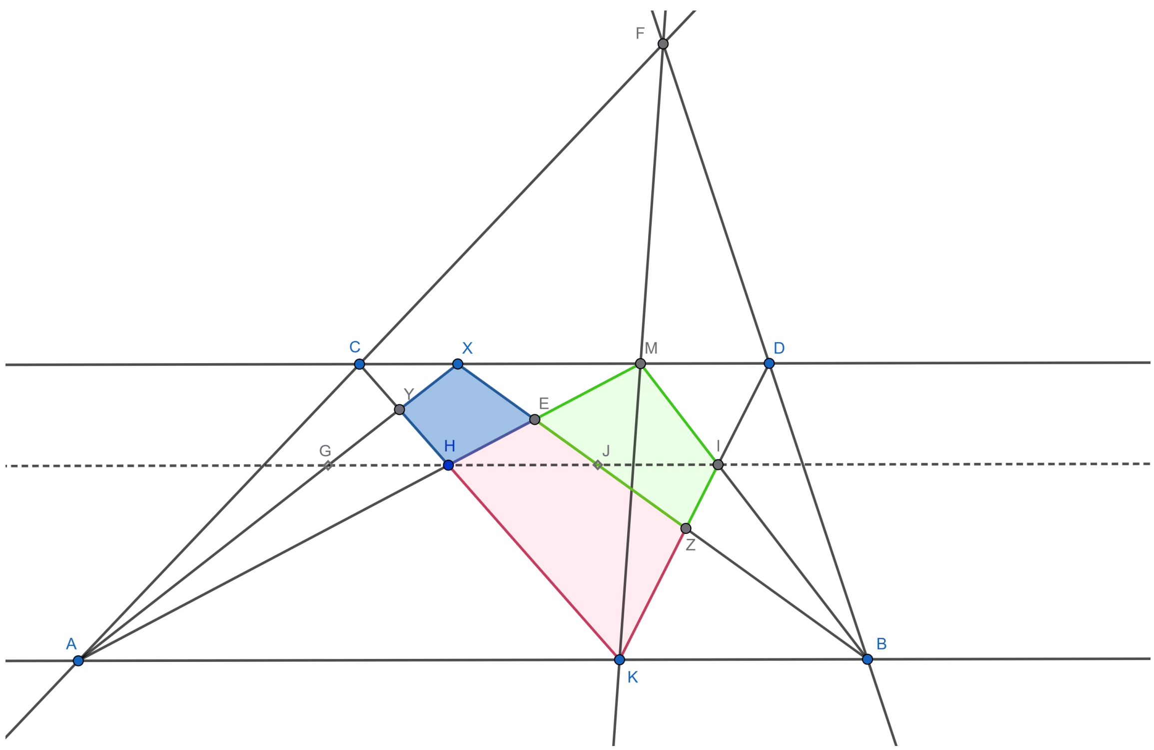
Problema. Consideriamo il trapezio ABCD. Scegliamo un punto qualsiasi K sulla base maggiore AB.

Dobbiamo determinare un punto M sulla base minore CD tale da rendere massima l'area del quadrilatero intersezione dei triangoli ABM e DCK.

Soluzione. Sia $F = AC \cap BD$, allora $M = CD \cap FK$ è il punto cercato. M su CD è tale che $CM = AK * CD/AB$



Dimostrazione. Sia X un qualsiasi punto su CD(supponiamo, senza perdita di generalità, che sia nella parte CM di CD) e sia Y e Z le intersezioni con CK e DK rispettivamente.

Se $H = AM \cap CK$ e $I = BM \cap DK$, vogliamo provare che $Area(KHMI) \geq Area(KYXZ)$. Per fare ciò è sufficiente provare che $Area(ZEMI) \geq Area(HYXE)$.

I due triangoli XMA e XMB sono equivalenti, avendo la stessa base e uguale altezza. Per il $Lemma 1$ la retta HI è parallela ad AB. Siano G e J i punti in cui

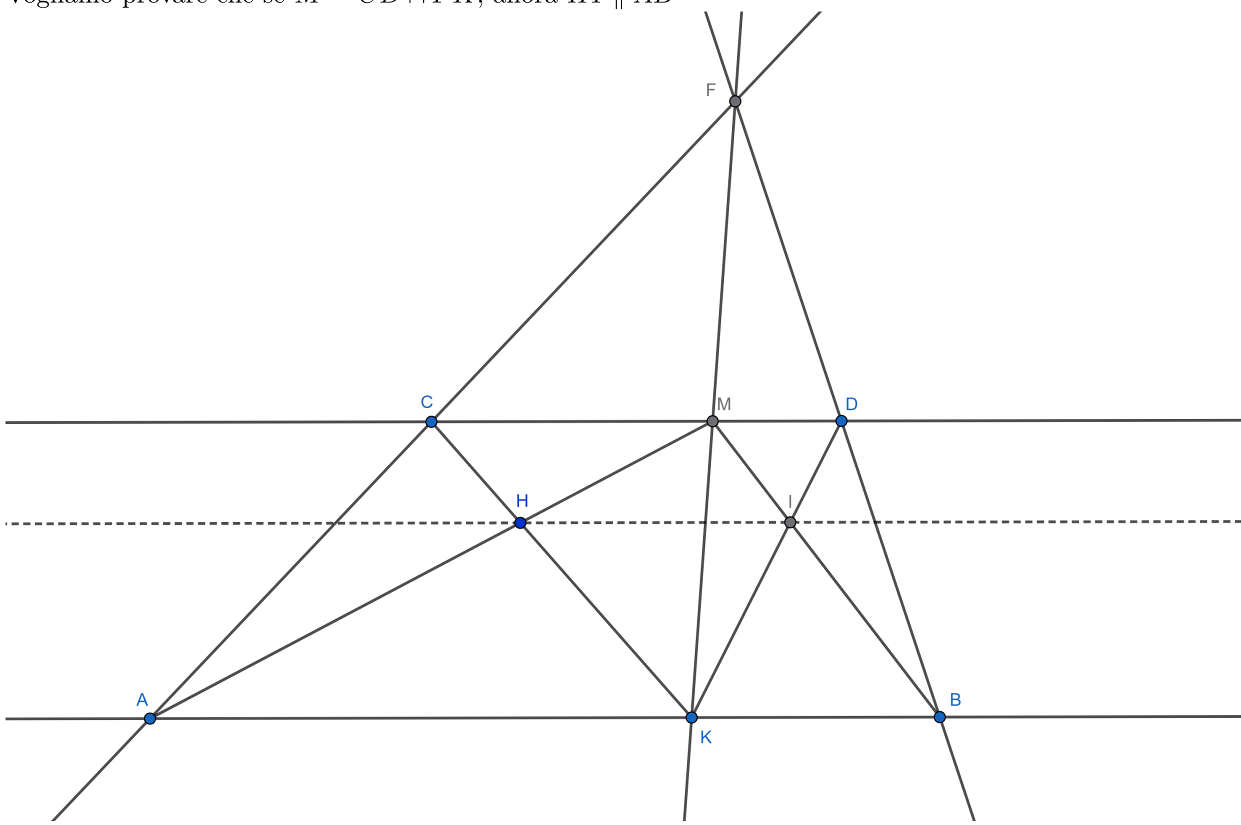
HI taglia XA e XB rispettivamente. Per il *Lemma*2 $GHA \equiv JIB$. Pertanto $Area(YHA) \geq Area(GHA) = Area(JIB) \geq Area(IZB)$. Da ciò deriva che $Area(XMHY) \geq Area(XMIZ)$.

Considerata la parte comune XME, resta provato quanto si doveva, cioé che $Area(ZEMI) \geq Area(HYXE)$ e, in definitiva, che $Area(KHMI) \geq Area(KYXZ)$.

□

*Lemma*1

Vogliamo provare che se $M = CD \cap FK$, allora $HI \parallel AB$

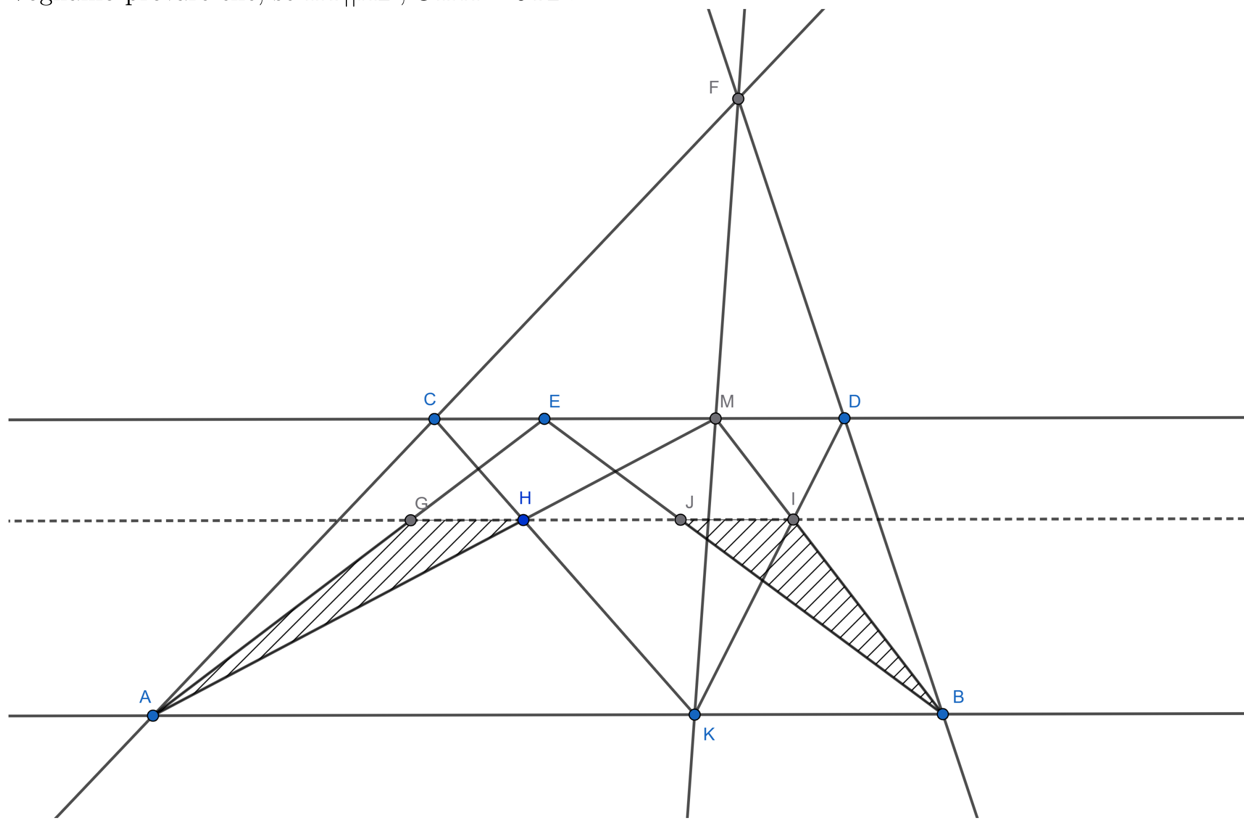


Per le similitudini determinate dal fatto che $AB \parallel CD$, valgono le seguenti uguaglianze: $CM/AK = FM/FK = DM/BK$. Essendo $AHK \sim MHC$ e $BIK \sim MID$, si ha che

$MH/HA = CM/AK = DM/BK = MI/IB$, pertanto resta provato che $HI||AB$.

*Lemma*2

Vogliamo provare che, se $HI||AB$, $GHA \equiv JIB$.



Per le similitudini indotte dalle rette parallele, $GH/EM = AH/AM = BI/BM = JI/EM$. Pertanto $GH = JI$.

Da questo deriva immediatamente che $GHA \equiv JIB$, avendo uguale base e uguale altezza.