Esercizio. Provare che $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^3+3n^2+2n} < \frac{1}{4}$

Soluzione. Verificato che $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$, troviamo a, b, c tali che $a/n + b/(n+1) + c/(n+2) = 1/(n^3 + 3n^2 + 2n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Eguagliando i numeratori delle due frazioni si ha che deve essere $a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Cioé $an^2 + 3an + 2a + bn^2 + 2bn + cn^2 + cn = 1$

Quindi valgono le seguenti equazioni simultanee:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$$

che hanno come soluzione i seguenti valori $a = c = 1/2$, $b = -1$

Pertanto si ha che

$$\frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

Facciamo ora separatamente le somme

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \tag{1}$$

e

$$\sum_{n=1}^{k} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+2)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \tag{2}$$

la (1) è uguale a

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

mentre la (2) vale(*)

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+2)}$$

Ma

$$-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+2)}=-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<0.$$

Pertanto

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=1-\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<\frac{1}{4}$$

anche per $k=1000$

(*) per “vedere” meglio l’eguaglianza si possono riordinare gli addendi nel seguente modo

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{k}$

$-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$